Profesor:
Jonathan Cumpa Velásquez

TRIGONOMETRÍA

GRUPO PITÁGORAS

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

1. IDENTIDADES PRINCIPALES:

- $\text{Sen}2x = 2\text{Senx}.\text{Cosx}$

***Demostración*:**

$$\text{Sen}(x+y) = \text{Senx}.\text{Cosy} + \text{Seny}.\text{Cosx}$$

$$\text{Si: } y = x$$

$$\text{Sen}(x+x) = \text{Senx}.\text{Cosx} + \text{Senx}.\text{Cosx}$$

$$\text{Sen}2x = 2\text{Senx}.\text{Cosx}$$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

1. IDENTIDADES PRINCIPALES:

- $\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$

Demostración:

$$\text{Cos}(x+y) = \text{Cos}x.\text{Cos}y - \text{Sen}x.\text{Sen}y$$

$$\text{Si}: y = x$$

$$\text{Cos}(x+x) = \text{Cos}x.\text{Cos}x - \text{Sen}x.\text{Sen}x$$

$$\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$$

- $\text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x$

Demostración:

$$\text{Cos}2x = \underbrace{\text{Cos}^2x}_{1-\text{Sen}^2x} - \text{Sen}^2x$$

$$\text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x$$

- $\text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2x - 1$

Demostración:

$$\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \underbrace{\text{Sen}^2x}_{1-\text{Cos}^2x}$$

$$\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - (1 - \text{Cos}^2x)$$

$$\text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2x - 1$$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

1. IDENTIDADES PRINCIPALES:

- $\text{Tan}2x = \dfrac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x}$

Demostración:

$$\text{Tan}(x + y) = \frac{\text{Tan}x + \text{Tan}y}{1 - \text{Tan}x.\text{Tan}y}$$

Si: $y = x$

$$\text{Tan}(x + x) = \frac{\text{Tan}x + \text{Tan}x}{1 - \text{Tan}x.\text{Tan}x}$$

$$\text{Tan}2x = \frac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x}$$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

1. IDENTIDADES PRINCIPALES:

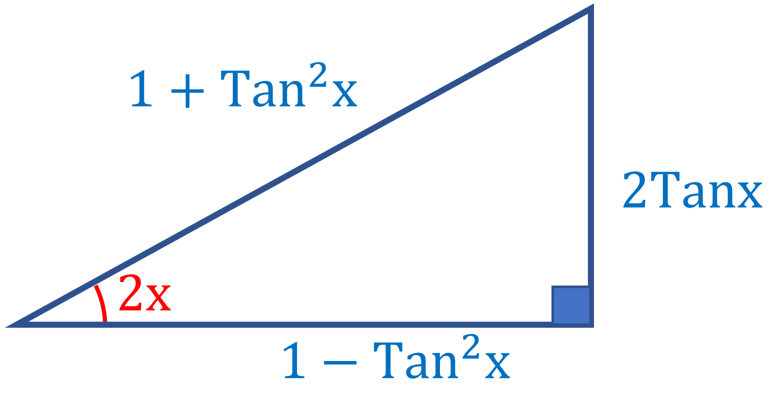
- $\text{Sen}2x = 2\text{Senx}.\text{Cosx}$

- $\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$

  ↳ $\text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x$

  ↳ $\text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2x - 1$

- $\text{Tan}2x = \dfrac{2\text{Tanx}}{1 - \text{Tan}^2x}$



↳ $\text{Sen}2x = \dfrac{2\text{Tanx}}{1 + \text{Tan}^2x}$

↳ $\text{Cos}2x = \dfrac{1 - \text{Tan}^2x}{1 + \text{Tan}^2x}$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

a) $(\text{Senx} \pm \text{Cosx})^2 = 1 \pm \text{Sen2x}$

***Demostración*:**

$$(\text{Senx} \pm \text{Cosx})^2 = 1 \pm \underbrace{2\text{SenxCosx}}_{\text{Sen2x}}$$

$$(\text{Senx} \pm \text{Cosx})^2 = 1 \pm \text{Sen2x}$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

b) $\mathrm{Cos}^4x - \mathrm{Sen}^4x = \mathrm{Cos}2x$

Demostración:

$$\mathrm{Cos}^4x - \mathrm{Sen}^4x = \underbrace{(\mathrm{Cos}^2x + \mathrm{Sen}^2x)}_{1}\underbrace{(\mathrm{Cos}^2x - \mathrm{Sen}^2x)}_{\mathrm{Cos}2x}$$

$$\mathrm{Cos}^4x - \mathrm{Sen}^4x = \mathrm{Cos}2x$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

c) $\operatorname{Sen}^4x + \operatorname{Cos}^4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\operatorname{Cos}4x$

Demostración:

$$\operatorname{Sen}^4x + \operatorname{Cos}^4x = 1 - 2\operatorname{Sen}^2x\operatorname{Cos}^2x$$

$$\operatorname{Sen}^4x + \operatorname{Cos}^4x = 1 - \frac{2.\,2\operatorname{Sen}^2x.\operatorname{Cos}^2x}{2}$$

$$\operatorname{Sen}^4x + \operatorname{Cos}^4x = 1 - \frac{\underbrace{4\operatorname{Sen}^2x.\operatorname{Cos}^2x}_{(\operatorname{Sen}2x)^2}}{2}$$

$$\operatorname{Sen}^4x + \operatorname{Cos}^4x = 1 - \frac{\underbrace{2\operatorname{Sen}^2 2x}_{(1-\operatorname{Cos}4x)}}{2.2}$$

$$\operatorname{Sen}^4x + \operatorname{Cos}^4x = \frac{4}{4} - \frac{(1-\operatorname{Cos}4x)}{4}$$

$$\operatorname{Sen}^4x + \operatorname{Cos}^4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\operatorname{Cos}4x$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

d) $\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\text{Cos}4x$

Demostración:

$$\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x = 1 - 3\text{Sen}^2x\text{Cos}^2x$$

$$\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x = 1 - \frac{3.\overbrace{4\text{Sen}^2x.\text{Cos}^2x}^{(\text{Sen}2x)^2}}{4}$$

$$\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x = 1 - \frac{3\text{Sen}^2 2x}{4}$$

$$\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x = 1 - \frac{3.\overbrace{2\text{Sen}^2 2x}^{(1-\text{Cos}4x)}}{4.2}$$

$$\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x = \frac{8}{8} - \frac{3(1-\text{Cos}4x)}{8}$$

$$\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\text{Cos}4x$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

e) $\text{Cotx} + \text{Tanx} = 2\text{Csc}2\text{x}$

***Demostración*:**

$$\text{Cotx} + \text{Tanx} = \text{Secx}.\text{Cscx}$$

$$\text{Cotx} + \text{Tanx} = \frac{1}{\text{Cosx}.\text{Senx}}$$

$$\text{Cotx} + \text{Tanx} = \frac{2}{2\text{Senx}.\text{Cosx}}$$

$$\text{Cotx} + \text{Tanx} = \frac{2}{\text{Sen}2\text{x}}$$

$$\text{Cotx} + \text{Tanx} = 2\text{Csc}2\text{x}$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

f) $\text{Cotx} - \text{Tanx} = 2\text{Cot}2\text{x}$

***Demostración*:**

$$\text{Cotx} - \text{Tanx} = \frac{\text{Cosx}}{\text{Senx}} - \frac{\text{Senx}}{\text{Cosx}}$$

$$\text{Cotx} - \text{Tanx} = \frac{\text{Cos}^2\text{x} - \text{Sen}^2\text{x}}{\text{SenxCosx}}$$

$$\text{Cotx} - \text{Tanx} = \frac{2\ \text{Cos}2\text{x}}{2\ \text{SenxCosx}}$$

$$\text{Cotx} - \text{Tanx} = \frac{2\text{Cos}2\text{x}}{\text{Sen}2\text{x}}$$

$$\text{Cotx} - \text{Tanx} = 2\text{Cot}2\text{x}$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

g) $\text{Cotx} = \text{Csc2x} + \text{Cot2x}$

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{Cotx} + \text{Tanx} &= 2\text{Csc2x} \\ \text{Cotx} - \text{Tanx} &= 2\text{Cot2x} \end{aligned} \quad (+)$$

$$\cancel{2}\text{Cotx} = \cancel{2}\text{Csc2x} + \cancel{2}\text{Cot2x}$$

$$\text{Cotx} = \text{Csc2x} + \text{Cot2x}$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

h) $Tanx = Csc2x - Cot2x$

Demostración:

$$\begin{array}{l} Cotx + Tanx = 2Csc2x \\ Cotx - Tanx = 2Cot2x \end{array} \quad (-)$$

$$\cancel{2}Tanx = \cancel{2}Csc2x - \cancel{2}Cot2x$$

$$Tanx = Csc2x - Cot2x$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

i) $\mathrm{Sec}2x + 1 = \dfrac{\mathrm{Tan}2x}{\mathrm{Tanx}}$

Demostración:

$$\mathrm{Sec}2x + 1 = \frac{1 + \mathrm{Tan}^2x}{1 - \mathrm{Tan}^2x} + 1$$

$$\mathrm{Sec}2x + 1 = \frac{2}{1 - \mathrm{Tan}^2x} \times \frac{\mathrm{Tanx}}{\mathrm{Tanx}}$$

$$\mathrm{Sec}2x + 1 = \frac{2\mathrm{Tanx}}{1 - \mathrm{Tan}^2x} \times \frac{1}{\mathrm{Tanx}}$$

$$\mathrm{Sec}2x + 1 = \frac{\mathrm{Tan}2x}{\mathrm{Tanx}}$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

j) $\mathrm{Sec2x} - 1 = \mathrm{Tan2x.\,Tanx}$

Demostración:

$$\mathrm{Sec2x} - 1 = \frac{1 + \mathrm{Tan}^2\mathrm{x}}{1 - \mathrm{Tan}^2\mathrm{x}} - 1$$

$$\mathrm{Sec2x} - 1 = \frac{2\mathrm{Tan}^2\mathrm{x}}{1 - \mathrm{Tan}^2\mathrm{x}}$$

$$\mathrm{Sec2x} - 1 = \frac{2\mathrm{Tanx.\,Tanx}}{1 - \mathrm{Tan}^2\mathrm{x}}$$

$$\mathrm{Sec2x} - 1 = \mathrm{Tan2xTanx}$$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

a) $(\text{Senx} \pm \text{Cosx})^2 = 1 \pm \text{Sen2x}$

b) $\text{Cos}^4\text{x} - \text{Sen}^4\text{x} = \text{Cos2x}$

c) $\text{Sen}^4\text{x} + \text{Cos}^4\text{x} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\text{Cos4x}$

d) $\text{Sen}^6\text{x} + \text{Cos}^6\text{x} = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\text{Cos4x}$

e) $\text{Cotx} + \text{Tanx} = 2\text{Csc2x}$

f) $\text{Cotx} - \text{Tanx} = 2\text{Cot2x}$

g) $\text{Cotx} = \text{Csc2x} + \text{Cot2x}$

h) $\text{Tanx} = \text{Csc2x} - \text{Cot2x}$

i) $\text{Sec2x} + 1 = \dfrac{\text{Tan2x}}{\text{Tanx}}$

j) $\text{Sec2x} - 1 = \text{Tan2x}.\text{Tanx}$

3. IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN:

- $2\mathrm{Sen}^2\mathrm{x} = 1 - \mathrm{Cos}2\mathrm{x}$

Demostración:

$$\mathrm{Cos}2\mathrm{x} = 1 - 2\mathrm{Sen}^2\mathrm{x}$$

$$2\mathrm{Sen}^2\mathrm{x} = 1 - \mathrm{Cos}2\mathrm{x}$$

- $2\mathrm{Cos}^2\mathrm{x} = 1 + \mathrm{Cos}2\mathrm{x}$

Demostración:

$$\mathrm{Cos}2\mathrm{x} = 2\mathrm{Cos}^2\mathrm{x} - 1$$

$$2\mathrm{Cos}^2\mathrm{x} = 1 + \mathrm{Cos}2\mathrm{x}$$

3. IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN:

- $8\text{Sen}^4x = 3 - 4\text{Cos}2x + \text{Cos}4x$

Demostración:

$$\text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\text{Cos}4x$$

$$\text{Cos}^4x - \text{Sen}^4x = \text{Cos}2x$$

$(-)$

$$2\text{Sen}^4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\text{Cos}4x - \text{Cos}2x$$

$\times 4$: $8\text{Sen}^4x = 3 - 4\text{Cos}2x + \text{Cos}4x$

3. IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN:

- $8\text{Cos}^4x = 3 + 4\text{Cos}2x + \text{Cos}4x$

Demostración:

$$\text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\text{Cos}4x$$

$$\text{Cos}^4x - \text{Sen}^4x = \text{Cos}2x$$

(+)

$$2\text{Cos}^4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\text{Cos}4x + \text{Cos}2x$$

$\times 4$: $$8\text{Cos}^4x = 3 + 4\text{Cos}2x + \text{Cos}4x$$

2. IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN:

- ❖ $2\text{Sen}^2\text{x} = 1 - \text{Cos}2\text{x}$
- ❖ $2\text{Cos}^2\text{x} = 1 + \text{Cos}2\text{x}$
- ❖ $8\text{Sen}^4\text{x} = 3 - 4\text{Cos}2\text{x} + \text{Cos}4\text{x}$
- ❖ $8\text{Cos}^4\text{x} = 3 + 4\text{Cos}2\text{x} + \text{Cos}4\text{x}$

❖ OBSERVACIÓN:

$$-\frac{1}{2} \leq \mathbf{Senx.Cosx} \leq \frac{1}{2}; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq \mathbf{Sen}^{2n}\mathbf{x} + \mathbf{Cos}^{2n}\mathbf{x} \leq 1; \forall x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z}^{+}$$

❖ OBSERVACIÓN:

Si $x \in [0\ ;\ \pi]$, se cumple:

- $$\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2+2\mathrm{Cos}x}}}}}_{\text{n radicales}} = 2\mathrm{Sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

- $$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2+2\mathrm{Cos}x}}}}}_{\text{n radicales}} = 2\mathrm{Cos}\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

1. Calcule el valor de Sen2x, si se tiene que: $\text{Senx} + \text{Cosx} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Resolución:

$$\text{Senx} + \text{Cosx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

AL^2:

$$1+\text{Sen2x} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \mathbf{Sen2x = -\frac{2}{3}}$$

CLAVE: D

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

2. Determinar la diferencia entre los valores máximo y mínimo de la expresión : $S = 16Sen^2x + Cos4x$

Resolución:

$$S = 8.2Sen^2x + Cos2(2x)$$

$$S = 8(1 - Cos2x) + 2Cos^2 2x - 1$$

$$S = 2Cos^2 2x - 8Cos2x + 7$$

$$S = 2(Cos^2 2x - 4Cos2x + 4) + 7 - 8$$

$$S = 2(Cos2x - 2)^2 - 1$$

$\in \mathbb{R} \longrightarrow 2x \in \mathbb{R}$

$$-1 \leq Cos2x \leq 1$$

$$-3 \leq Cos2x - 2 \leq -1$$

$$1 \leq (Cos2x - 2)^2 \leq 9$$

$$2 \leq 2(Cos2x - 2)^2 \leq 18$$

$$\underbrace{1}_{S_{mín}} \leq 2(Cos2x - 2)^2 - 1 \leq \underbrace{17}_{S_{máx}}$$

$$\therefore \mathbf{S_{máx} - S_{mín} = 16}$$

CLAVE: C

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

3. Si se tiene que : $\mathrm{Sec}^2\alpha - \mathrm{Sec}^2\beta = 4$, calcule el valor de : $S = \dfrac{\mathrm{Tan}\alpha}{\mathrm{Sen}2\alpha} - \dfrac{\mathrm{Tan}\beta}{\mathrm{Sen}2\beta}$

Resolución:

$$S = \frac{\mathrm{Tan}\alpha}{\mathrm{Sen}2\alpha} - \frac{\mathrm{Tan}\beta}{\mathrm{Sen}2\beta}$$

$$S = \frac{\cancel{\mathrm{Tan}\alpha}}{\dfrac{2\cancel{\mathrm{Tan}\alpha}}{1+\mathrm{Tan}^2\alpha}} - \frac{\cancel{\mathrm{Tan}\beta}}{\dfrac{2\cancel{\mathrm{Tan}\beta}}{1+\mathrm{Tan}^2\beta}}$$

$$S = \frac{1+\mathrm{Tan}^2\alpha}{2} - \frac{1+\mathrm{Tan}^2\beta}{2}$$

$$S = \frac{\mathrm{Sec}^2\alpha - \mathrm{Sec}^2\beta}{2}$$

$$S = \frac{4}{2}$$

$\therefore \mathbf{S = 2}$

CLAVE: B

4. Reducir la expresión: $E = (\text{Tanx} + \text{Cotx})(\text{Sec}^2x + \text{Csc}^2x)$

Resolución:

$$E = (\text{Tanx} + \text{Cotx})\underbrace{(\text{Sec}^2x.\text{Csc}^2x)}$$

$$\underbrace{(\text{Secx}.\text{Csc}\,x)^2}$$

$$(\text{Tanx} + \text{Cotx})^2$$

$$E = (\text{Tanx} + \text{Cotx})^3$$

$$E = (2\text{Csc}2x)^3$$

$$\therefore \mathbf{E = 8Csc^3 2x}$$

CLAVE: C

5. Hallar el rango de la función : $F(x) = \underbrace{2\text{Senx}\left[\sqrt{2}\text{Cos}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\text{Cosx}\right]} \rightarrow x \in \mathbb{R}$

Resolución:

$$F(x) = 2\text{Senx}\left[\cancel{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\text{Cosx} - \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\text{Senx}\right) + \text{Cosx}\right]$$

$$F(x) = 2\text{Senx}[2\text{Cosx} - \text{Senx}]$$

$$F(x) = 2.2\text{SenxCosx} - 2\text{Sen}^2x$$

$$F(x) = 2\text{Sen}2x - (1 - \text{Cos}2x)$$

$$F(x) = 2\text{Sen}2x + \text{Cos}2x - 1$$

$$\longrightarrow 2x \in \mathbb{R}$$

$$-\sqrt{5} \leq 2\text{Sen}2x + \text{Cos}2x \leq \sqrt{5}$$

$$-\sqrt{5} - 1 \leq \underbrace{2\text{Sen}2x + \text{Cos}2x - 1}_{F(x)} \leq \sqrt{5} - 1$$

$$\left[-\sqrt{5} - 1\,;\ \sqrt{5} - 1\right]$$

CLAVE: E

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

6. Calcular el valor de : $P = Cos^4\frac{\pi}{8} + Cos^4\frac{3\pi}{8}$

Resolución:

$$P = Cos^4\frac{\pi}{8} + Sen^4\frac{\pi}{8}$$

$$P = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}Cos4\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$P = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(0)$$

$$\therefore \mathbf{P = \frac{3}{4}}$$

CLAVE: B

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

7. Simplificar la expresión : $S = \dfrac{1 + \text{Sen}2x + \text{Cos}2x}{1 + \text{Sen}2x - \text{Cos}2x}$

Resolución:

$$S = \frac{1 + \text{Cos}2x + \text{Sen}2x}{1 - \text{Cos}2x + \text{Sen}2x}$$

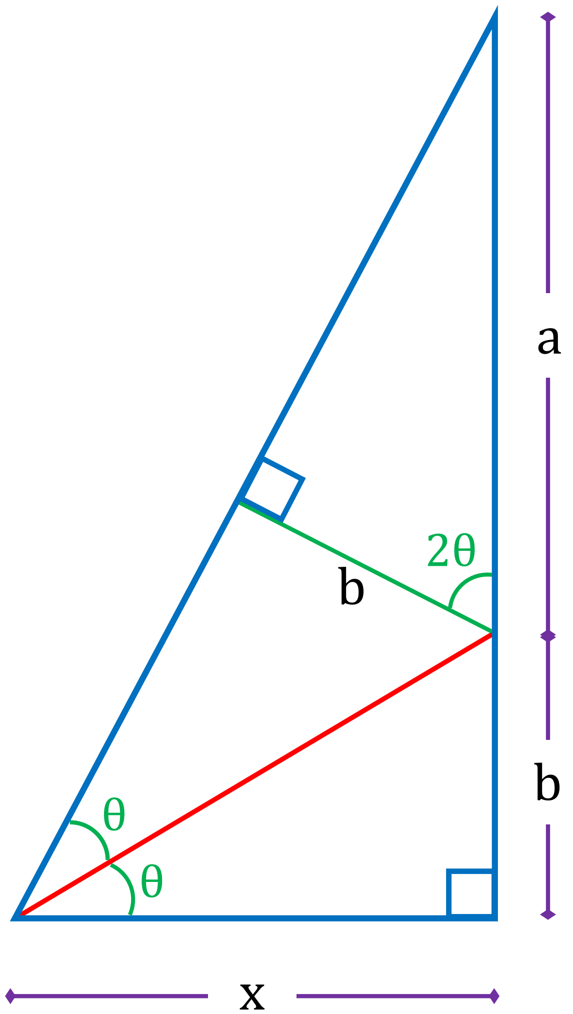
$$S = \frac{\cancel{2}\text{Cos}^2x + \cancel{2}\text{SenxCosx}}{\cancel{2}\text{Sen}^2x + \cancel{2}\text{SenxCosx}}$$

$$S = \frac{\text{Cosx}\cancel{(\text{Cosx} + \text{Senx})}}{\text{Senx}\cancel{(\text{Senx} + \text{Cosx})}}$$

$$\therefore \mathbf{S = Cotx}$$

CLAVE: B

8. Hallar x en la figura mostrada



Resolución:

- Del gráfico:

$$\mathrm{Tan}\theta = \frac{b}{x}$$

$$\mathrm{Cos}2\theta = \frac{b}{a}$$

$$\mathrm{Cos}2\theta = \frac{1-\mathrm{Tan}^2\theta}{1+\mathrm{Tan}^2\theta}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1-\frac{b^2}{x^2}}{1+\frac{b^2}{x^2}}$$

- PRP:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\cancel{2}}{\frac{\cancel{2}b^2}{x^2}}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{x^2}{b^2}$$

$$\mathbf{x = b.\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}}$$

- Del prob:

a=5 y b=4

$$x = 4.\sqrt{\frac{5+4}{5-4}}$$

$$\therefore \mathbf{x = 12}$$

CLAVE: C

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

9. Calcular "m" en la igualdad : $\dfrac{\text{Senx}}{2} = \dfrac{\text{Sen2x}}{3} = \dfrac{\text{Sen4x}}{\text{m}}$

Resolución:

$$\frac{\text{Senx}}{2} = \frac{\text{Sen2x}}{3} = \frac{\text{Sen4x}}{\text{m}}$$

❖ $3\cancel{\text{Senx}} = 2.2\cancel{\text{Senx}}\text{Cosx}$

$$\rightarrow \text{Cosx} = \frac{3}{4}$$

❖ $\text{m}\cancel{\text{Sen2x}} = 3.2\cancel{\text{Sen2x}}\text{Cos2x}$

$$\rightarrow \text{m} = 6\text{Cos2x}$$

$$\text{m} = 6(2\text{Cos}^2\text{x} - 1)$$

$$\text{m} = 6\left(2 \times \frac{9}{16} - 1\right)$$

$$\text{m} = 6\left(\frac{9}{8} - 1\right)$$

$$\text{m} = 6\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\therefore \mathbf{m = \frac{3}{4}}$$

CLAVE: C

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

10. Calcular Cos2x de: $\sqrt{2}\text{Cos}\theta = \text{Cosx} + \text{Cos}^3\text{x} \quad \wedge \quad \sqrt{2}\text{Sen}\theta = \text{Senx} - \text{Sen}^3\text{x}$

Resolución:

❖ $\sqrt{2}\text{Cos}\theta = \text{Cosx} + \text{Cos}^3\text{x}$

AL^2: $2\text{Cos}^2\theta = \text{Cos}^2\text{x} + 2\text{Cos}^4\text{x} + \text{Cos}^6\text{x}$

❖ $\sqrt{2}\text{Sen}\theta = \text{Senx} - \text{Sen}^3\text{x}$

AL^2: $2\text{Sen}^2\theta = \text{Sen}^2\text{x} - 2\text{Sen}^4\text{x} + \text{Sen}^6\text{x}$

$+$

$$2\underbrace{(\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta)}_{1} = \underbrace{\text{Sen}^2\text{x} + \text{Cos}^2\text{x}}_{1} + 2\underbrace{(\text{Cos}^4\text{x} - \text{Sen}^4\text{x})}_{\text{Cos2x}} + \underbrace{\text{Sen}^6\text{x} + \text{Cos}^6\text{x}}_{\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\text{Cos4x}}$$

$$\frac{3}{8}(1 - \text{Cos4x}) = 2\text{Cos2x}$$

$$3.\cancel{2}\text{Sen}^2 2\text{x} = 8.\cancel{2}\text{Cos2x}$$

$$3(1 - \text{Cos}^2 2\text{x}) = 8\text{Cos2x}$$

$$3\text{Cos}^2 2\text{x} + 8\text{Cos2x} - 3 = 0 \quad \begin{cases} \mathbf{Cos2x = \frac{1}{3}} \\ \text{Cos2x} = -3 \end{cases}$$

CLAVE: B

11. Dada la igualdad: $\mathrm{Cos}4x + 4\mathrm{Cos}2x = \mathrm{Cos}\,\frac{\pi}{3}.\mathrm{Sen}^4x - 3$, calcule el valor de : $S = \frac{5\mathrm{Cos}2x - 4}{5\mathrm{Cos}2x + 4}$

Resolución:

$$\underbrace{3 + 4\mathrm{Cos}2x + \mathrm{Cos}4x}_{8\mathrm{Cos}^4x} = \frac{1}{2}.\mathrm{Sen}^4x$$

$$\mathrm{Tan}^4x = 16$$

$$\mathrm{Tan}^2x = 4$$

$$\mathrm{Cos}2x = \frac{1 - \mathrm{Tan}^2x}{1 + \mathrm{Tan}^2x}$$

$$\mathrm{Cos}2x = \frac{1 - 4}{1 + 4}$$

$$5\mathrm{Cos}2x = -3$$

$$S = \frac{-3 - 4}{-3 + 4}$$

$$\therefore \mathbf{S = -7}$$

CLAVE: C

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

12. Reducir la expresión : $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\text{Cos}32\theta}}}}}$, Si: $0<\theta<\dfrac{\pi}{64}$

$$0<\theta<\frac{\pi}{64}\ \xrightarrow{\times 32}\ 0<32\theta<\frac{\pi}{2}$$

Resolución:

$\sqrt{2+2\text{Cos}2\text{x}}$

$\sqrt{2(1+\text{Cos}2\text{x})}$

$\sqrt{2(2\text{Cos}^2\text{x})}$

$\sqrt{4\text{Cos}^2\text{x}}$

$2|\text{Cosx}|$

Si x ∈ IC:

2Cosx

$$\underbrace{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+2\text{Cos}32\theta}}_{2\text{Cos}16\theta}}}_{2\text{Cos}8\theta}}}_{2\text{Cos}4\theta}}}_{2\text{Cos}2\theta}}}_{2\text{Cos}\theta}$$

CLAVE: B

13. Calcule el máximo valor de : $S = \dfrac{3 + \text{Cos}4x}{\text{Tan}^2x + \text{Cot}^2x}$

Resolución:

$$S = \frac{4\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\text{Cos}4x\right)}{\frac{\text{Sen}^2x}{\text{Cos}^2x} + \frac{\text{Cos}^2x}{\text{Sen}^2x}} \longrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$$

$$S = \frac{4\cancel{(\text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x)}}{\frac{\cancel{\text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x}}{\text{Sen}^2x\text{Cos}^2x}}$$

$$S = 4\text{Sen}^2x\text{Cos}^2x$$

$$S = \text{Sen}^2 2x$$

$$2x \neq k\pi$$

$$-1 \leq \text{Sen}2x \leq 1 \quad \wedge \quad \text{Sen}2x \neq 0$$

$$0 < \underbrace{\text{Sen}^2 2x}_{S} \leq 1$$

$$\therefore \mathbf{S_{máx} = 1}$$

CLAVE: E

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

14. Si se tiene que: $3\text{Sec}\theta = 2\text{Csc}\theta$ calcule el valor de: $S = \dfrac{3\text{Csc}2\theta + 2\text{Sec}2\theta}{\text{Sec}2\theta.\text{Csc}2\theta}$

Resolución:

$$S = \frac{3\cancel{\text{Csc}2\theta}}{\text{Sec}2\theta.\cancel{\text{Csc}2\theta}} + \frac{2\cancel{\text{Sec}2\theta}}{\cancel{\text{Sec}2\theta}.\text{Csc}2\theta}$$

$$S = 3\text{Cos}2\theta + 2\text{Sen}2\theta$$

$$3\text{Sec}\theta = 2\text{Csc}\theta$$

$$\frac{3}{\text{Cos}\theta} = \frac{2}{\text{Sen}\theta}$$

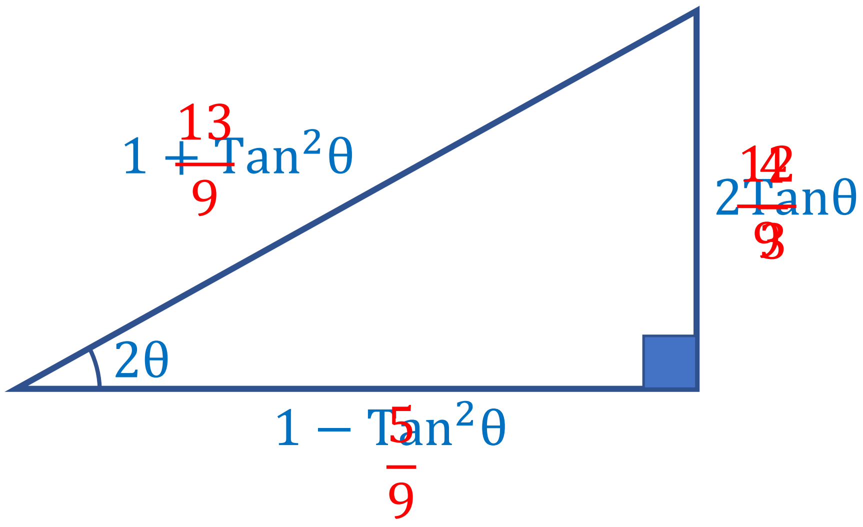
$$\text{Tan}\theta = \frac{2}{3}$$

Reemplazando:

$$S = 3 \times \frac{5}{13} + 2 \times \frac{12}{13}$$

$$S = \frac{15 + 24}{13}$$

$$\therefore \mathbf{S = 3}$$



CLAVE: C

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

15. Si se tiene que: $2\text{Sen}\alpha = \text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta$,calcular el valor de: $E = \dfrac{\text{Cos}2\alpha + \text{Cos}^2(45° + \theta)}{\text{Cos}^2(45° + \theta)}$

Resolución:

$$\cancel{\sqrt{2}}.\sqrt{2}\text{Sen}\alpha = \cancel{\sqrt{2}}\text{Sen}(\theta + 45°)$$

AL^2:

$$\underbrace{2\text{Sen}^2\alpha}_{1 - \text{Cos}2\alpha} = \underbrace{\text{Sen}^2(\theta + 45°)}_{1 - \text{Cos}^2(\theta + 45°)}$$

$$\text{Cos}2\alpha = \text{Cos}^2\ (\theta + 45°)$$

$$E = \frac{\text{Cos}2\alpha + \text{Cos}2\alpha}{\text{Cos}2\alpha}$$

$$\therefore \mathbf{E = 2}$$

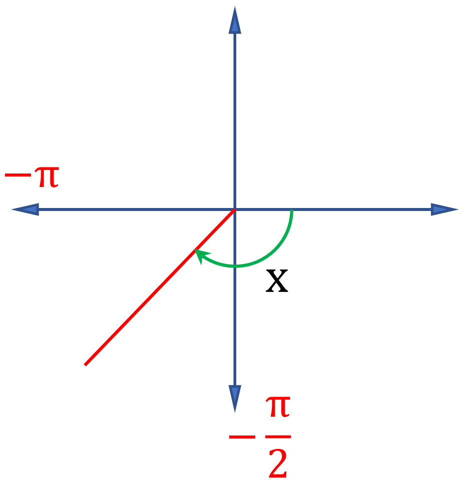
CLAVE: B

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

16. Si se tiene que: $-2\pi < x < 0$ y además $\mathrm{Cosx} < 0 \wedge \mathrm{Tanx} > 0$; reducir la expresión: $E = \sqrt{1 + \mathrm{Senx}} + \sqrt{1 - \mathrm{Senx}}$

Resolución:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Cosx} < 0 \\ \\ \mathrm{Tanx} > 0 \end{array}\right\} x \in \mathrm{IIIC}$$



$$-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < -\frac{\pi}{4}$$

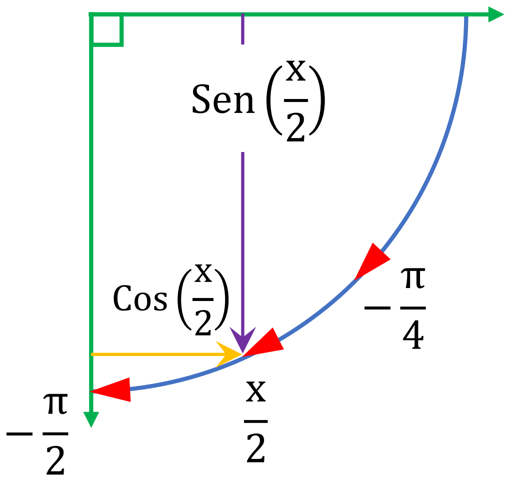
$$E = \sqrt{1 + \mathrm{Sen}2\left(\frac{x}{2}\right)} + \sqrt{1 - \mathrm{Sen}2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$E = \cancel{\sqrt{}}\left[\mathrm{Sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{Cos}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{\cancel{2}} + \cancel{\sqrt{}}\left[\mathrm{Sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{Cos}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{\cancel{2}}$$

$$E = \underbrace{\left|\mathrm{Sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{Cos}\left(\frac{x}{2}\right)\right|}_{(-)} + \underbrace{\left|\mathrm{Sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{Cos}\left(\frac{x}{2}\right)\right|}_{(-)}$$

$$E = -\mathrm{Sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \cancel{\mathrm{Cos}\left(\frac{x}{2}\right)} - \mathrm{Sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \cancel{\mathrm{Cos}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\therefore \mathbf{E = -2Sen\left(\frac{x}{2}\right)}$$



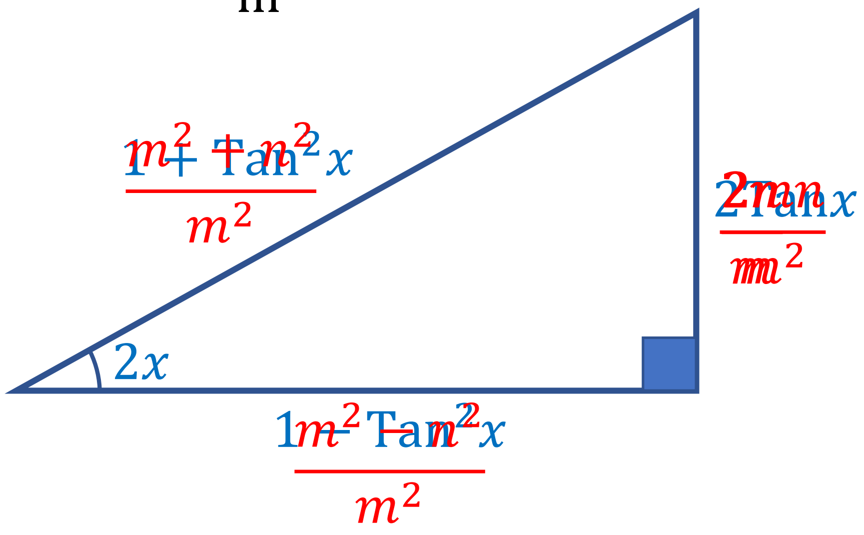
CLAVE: A

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

17. Si se tiene que $\mathrm{mTanx} - \mathrm{n} = 0$,reducir la expresión: $\mathrm{E} = (\mathrm{mCos2x} + \mathrm{nSen2x})(\mathrm{mSen2x} - \mathrm{nCos2x})$

Resolución:

$$\mathrm{Tanx} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}}$$



$$\mathrm{E} = (\mathrm{mCos2x} + \mathrm{nSen2x})(\mathrm{mSen2x} - \mathrm{nCos2x})$$

$$\mathrm{E} = \left(\frac{m(m^2 - n^2)}{m^2 + n^2} + \frac{\mathrm{n}.\,2mn}{m^2 + n^2}\right)\left(\frac{\mathrm{m}.\,2mn}{m^2 + n^2} - \frac{\mathrm{n}(m^2 - n^2)}{m^2 + n^2}\right)$$

$$\mathrm{E} = \left(\frac{\mathrm{m}(\cancel{\mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2 + 2\mathrm{n}^2})}{\cancel{\mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2}}\right)\left(\frac{\mathrm{n}(\cancel{2\mathrm{m}^2 - \mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2})}{\cancel{\mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2}}\right)$$

$\therefore$ **E = mn**

CLAVE: C

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

18. Calcular el valor de: $E = \left(\mathrm{Sec}\frac{2\pi}{7} - 1\right)\mathrm{Tan}\frac{3\pi}{7}$

Resolución:

$$E = \mathrm{Tan}\frac{2\pi}{7}\mathrm{Tan}\frac{\pi}{7}\mathrm{Tan}\frac{3\pi}{7}$$

Sea: $\theta = \frac{k\pi}{7}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$7\theta = k\pi$$

$$4\theta + 3\theta = k\pi$$

$$4\theta = k\pi - 3\theta$$

$$\mathrm{Tan}4\theta = \mathrm{Tan}(k\pi - 3\theta)$$

$$\mathrm{Tan}4\theta = -\mathrm{Tan}3\theta$$

$$\mathrm{Tan}4x = \frac{4\mathrm{Tan}x - 4\mathrm{Tan}^3x}{1 - 4\mathrm{Tan}^2x + \mathrm{Tan}^4x}$$

$$\mathrm{Tan}3x = \frac{3\mathrm{Tan}x - \mathrm{Tan}^3x}{1 - 3\mathrm{Tan}^2x}$$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

$$\frac{4\text{Tan}\theta - 4\text{Tan}^3\theta}{1 - 4\text{Tan}^2\theta + \text{Tan}^4\theta} = \frac{-3\text{Tan}\theta + \text{Tan}^3\theta}{1 - 3\text{Tan}^2\theta}$$

$$(4\text{Tan}\theta - 4\text{Tan}^3\theta)(1 - 3\text{Tan}^2\theta) = (1 - 4\text{Tan}^2\theta + \text{Tan}^4\theta)(-3\text{Tan}\theta + \text{Tan}^3\theta)$$

$$4\text{Tan}\theta - 16\text{Tan}^3\theta + 12\text{Tan}^5\theta = -3\text{Tan}\theta + 13\text{Tan}^3\theta - 7\text{Tan}^5\theta + \text{Tan}^7\theta$$

$$\text{Tan}^7\theta - 19\text{Tan}^5\theta + 29\text{Tan}^3\theta - 7\text{Tan}\theta = 0$$

$$\text{Tan}\theta(\text{Tan}^6\theta - 19\text{Tan}^4\theta + 29\text{Tan}^2\theta - 7) = 0$$

$$\text{Tan}^6\theta - 19\text{Tan}^4\theta + 29\text{Tan}^2\theta - 7 = 0$$

$$\text{Tan}\theta_1.\text{Tan}\theta_2.\text{Tan}\theta_3.\text{Tan}\theta_4.\text{Tan}\theta_5.\text{Tan}\theta_6 = -7$$

$$\text{Tan}\frac{\pi}{7}.\text{Tan}\frac{2\pi}{7}.\text{Tan}\frac{3\pi}{7}.\underbrace{\text{Tan}\frac{4\pi}{7}}_{-\text{Tan}\frac{3\pi}{7}}.\underbrace{\text{Tan}\frac{5\pi}{7}}_{-\text{Tan}\frac{2\pi}{7}}.\underbrace{\text{Tan}\frac{6\pi}{7}}_{\cancel{-}\text{Tan}\frac{\pi}{7}} = \cancel{-}7 \Rightarrow \left(\text{Tan}\frac{\pi}{7}\text{Tan}\frac{2\pi}{7}\text{Tan}\frac{3\pi}{7}\right)^2 = 7$$

$$\therefore \mathbf{Tan}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{7}}\mathbf{Tan}\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{7}}\mathbf{Tan}\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{7}} = \sqrt{\mathbf{7}}$$

CLAVE: D

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

19. Calcular el valor de: $S = \text{Cos}\frac{\pi}{7}.\text{Cos}\frac{2\pi}{7}.\text{Cos}\frac{4\pi}{7}$

Resolución:

$$2\text{Sen}\frac{\pi}{7}.S = \underbrace{2\text{Sen}\frac{\pi}{7}.\text{Cos}\frac{\pi}{7}}.\text{Cos}\frac{2\pi}{7}.\text{Cos}\frac{4\pi}{7}$$

$$2.2\text{Sen}\frac{\pi}{7}.S = \underbrace{2.\text{Sen}\frac{2\pi}{7}.\text{Cos}\frac{2\pi}{7}}.\text{Cos}\frac{4\pi}{7}$$

$$2.4\text{Sen}\frac{\pi}{7}.S = \underbrace{2.\text{Sen}\frac{4\pi}{7}.\text{Cos}\frac{4\pi}{7}}$$

$$8\text{Sen}\frac{\pi}{7}.S = \text{Sen}\frac{8\pi}{7}$$

$$8\text{Sen}\frac{\pi}{7}.S = \text{Sen}\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)$$

$$8\cancel{\text{Sen}\frac{\pi}{7}}.S = -\cancel{\text{Sen}\frac{\pi}{7}}$$

$$\therefore \mathbf{S = -\frac{1}{8}}$$

CLAVE: C

20. Reducir la expresión: $S = \left(1 + \mathrm{Sec}\frac{2\pi}{7}\right)\left(1 + \mathrm{Sec}\frac{4\pi}{7}\right)\left(1 + \mathrm{Sec}\frac{8\pi}{7}\right)$

Resolución:

$$S = \left(\frac{\cancel{\mathrm{Tan}\frac{2\pi}{7}}}{\mathrm{Tan}\frac{\pi}{7}}\right)\left(\frac{\cancel{\mathrm{Tan}\frac{4\pi}{7}}}{\cancel{\mathrm{Tan}\frac{2\pi}{7}}}\right)\left(\frac{\mathrm{Tan}\frac{8\pi}{7}}{\cancel{\mathrm{Tan}\frac{4\pi}{7}}}\right)$$

$$S = \frac{\mathrm{Tan}\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)}{\mathrm{Tan}\frac{\pi}{7}}$$

$$S = \frac{\mathrm{Tan}\frac{\pi}{7}}{\mathrm{Tan}\frac{\pi}{7}}$$

$$\therefore \mathbf{S = 1}$$

CLAVE: “C”

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

UNI 2016 – II:

Si $\text{Tanx} + \text{Cotx} = \dfrac{5}{2}$ y $M = \dfrac{\text{Sen}(45° + x)}{\text{Sen}(135° + x)}$ Calcule M^2

A) 2 B) 9 C) 16 D) 25 E) 36

Resolución:

$$\text{Tanx} + \text{Cotx} = \frac{5}{2} \longrightarrow 2\text{Csc}2x = \frac{5}{2} \longrightarrow \text{Sen}2x = \frac{4}{5}$$

- Calcule M^2

$$M = \frac{\text{Sen}(45° + x)}{\text{Sen}(135° + x)}$$

$$M = \frac{\text{Sen}(45° + x)}{\text{Sen}(90° + 45° + x)}$$

$$M = \frac{\text{Sen}(45° + x)}{\text{Cos}(45° + x)}$$

AL^2: $$M^2 = \frac{\text{Sen}^2(45° + x)}{\text{Cos}^2(45° + x)}$$

$$M^2 = \frac{2\text{Sen}^2(45° + x)}{2\text{Cos}^2(45° + x)}$$

$$M^2 = \frac{1 - \text{Cos}(90° + 2x)}{1 + \text{Cos}(90° + 2x)}$$

$$M^2 = \frac{1 + \text{Sen}2x}{1 - \text{Sen}2x}$$

$$M^2 = \frac{1 + \frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}}$$

$$M^2 = \frac{\frac{9}{\cancel{5}}}{\frac{1}{\cancel{5}}}$$

$\therefore$ **$M^2 = 9$**

Clave: B

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

UNI 2015 – II:

Si para $\varphi \in [0; 2\pi]$ se tiene $\text{Sen}\varphi + \text{Cos}\varphi + \text{Sen}2\varphi = [\text{Sen}\varphi + \text{Cos}\varphi + A]^2 + B$, entonces $(2A + 4B)$ es igual a:

A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5

Resolución:

$$J = \text{Sen}\varphi + \text{Cos}\varphi + \text{Sen}2\varphi$$

$$J = \text{Sen}\varphi + \text{Cos}\varphi + \text{Sen}2\varphi + 1 - 1$$

$$J = \text{Sen}\varphi + \text{Cos}\varphi + \underbrace{1 + \text{Sen}2\varphi}_{(\text{Sen}\varphi + \text{Cos}\varphi)^2} - 1$$

$$J = \underbrace{(\text{Sen}\varphi + \text{Cos}\varphi)^2 + (\text{Sen}\varphi + \text{Cos}\varphi) + \frac{1}{4}}_{\left(\text{Sen}\varphi + \text{Cos}\varphi + \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{4} - 1$$

$$J = \left(\text{Sen}\varphi + \text{Cos}\varphi + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = [\text{Sen}\varphi + \text{Cos}\varphi + A]^2 + B$$

$$\frac{1}{2} = A \qquad -\frac{5}{4} = B$$

Piden : $(2A + 4B)$

$$2\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$\mathbf{-4}$$

Clave: D

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

UNI 2014 – I:

Calcule el valor aproximado de: $E = \text{Cot}4° - 7$

A) 7,07 B) 8,07 C) 9,07 D) 10,1 E) 11,2

Resolución:

$$E = \text{Cot}4° - 7$$

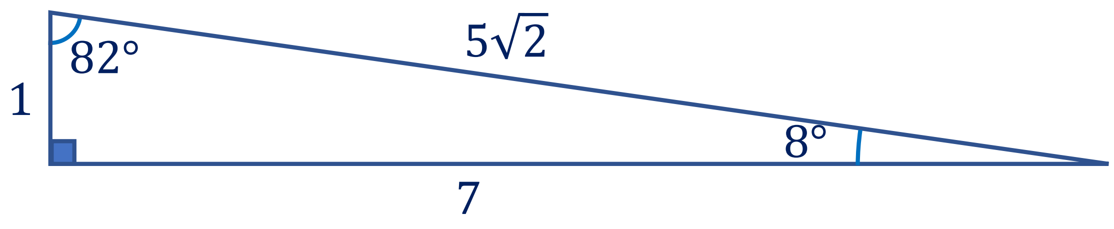
$$E = \text{Csc}8° + \text{Cot}8° - 7$$

$$E = 5\sqrt{2} + \cancel{7} - \cancel{7}$$

$$E = 5\sqrt{2}$$

$$E = 5(1.4142)$$

$$\therefore \mathbf{E = 7,07}$$



Clave: A

UNI 2013 – I:

Si $\mathrm{Sec}x = \mathrm{Csc}2\theta - \mathrm{Cot}2\theta$, determine: $E = \dfrac{\mathrm{Sec}^2\theta - \mathrm{Tan}^2x}{2 - \mathrm{Cot}\theta + \mathrm{Cos}x}$

A) -1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{3}{2}$

Resolución:

- $\mathrm{Sec}x = \mathrm{Csc}2\theta - \mathrm{Cot}2\theta$

  $\mathrm{Sec}x = \mathrm{Tan}\theta \longrightarrow \mathrm{Cos}x = \mathrm{Cot}\theta$

- Piden: $E = \dfrac{\mathrm{Sec}^2\theta - \mathrm{Tan}^2x}{2 - \mathrm{Cot}\theta + \mathrm{Cos}x}$

$$E = \frac{1 + \mathrm{Tan}^2\theta - \mathrm{Tan}^2x}{2 - \cancel{\mathrm{Cos}x} + \cancel{\mathrm{Cos}x}}$$

$$E = \frac{1 + \overbrace{\mathrm{Sec}^2x - \mathrm{Tan}^2x}^{1}}{2}$$

$\therefore \mathbf{E = 1}$

Clave: D

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS